

基于全变差的加权最小二乘法 PET 图像重建

童基均¹, 刘 进¹, 蔡 强²

(1. 浙江理工大学信息学院, 浙江杭州 310018; 2. 浙江清华长三角研究院, 浙江嘉兴 314000)

摘 要: 传统的加权最小二乘法、惩罚项加权最小二乘法虽然能够重建得到较好质量的图像,但在欠采样的条件下不能很好的抑制噪声.全变差作为正则项已广泛用于图像重建中,利用图像稀疏的先验知识能够在欠采样的条件下很好的重建图像.本文结合加权最小二乘法和全变差的优点,构造了基于全变差正则项的加权最小二乘法目标函数,运用交替求解的方法,将目标函数分解为求解二次优化和全变差正则化的优化问题,并分别用超松弛迭代方法和梯度下降法求解这两个优化问题.采用 Zubal 模型对该算法与传统算法进行仿真验证比较,并用相关系数、方差、信噪比等参数描述图像重建质量.结果表明在欠采样条件下,该算法能够更好的抑制噪声,重构效果比传统的有明显地提高.

关键词: 正电子发射断层扫描; 图像重建; 加权最小二乘法; 全变差

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 04-0787-04

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.04.027

The PET Image Reconstruction Based on Weighted Least-Squares and TV Penalty

TONG Ji-jun¹, LIU Jin¹, CAI Qiang²

(1. College of Information, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China;

2. Yangtze Delta Region Institute of Tsinghua University, Jiaxing, Zhejiang 314000, China)

Abstract: The traditional techniques of PET image reconstruction such as the least-squares and the penalty weighted least-squares can obtain high quality image, but they can't suppress the noise well under the limited angle situation. The total variation (TV) was used widely as penalty in image reconstruction, which applied the sparsity prior of image and could accurately reconstruct the image from the limited angle (a small quality of measurement). This article combined the advantages of the weighted least squares and total variation and constructed the objective function based on them, and solved the objective function using the alternate methods. The objective function was decomposed into two simple optimization problems for solving quadratic optimization and total variation regularization, the over relaxation method and the gradient descent method were used to solve these two optimization problems. Simulations using Zubal model were utilized to estimate the qualities of the reconstructed images, the evaluation parameters included CORR, VAR and SNR. The experimental results show the proposed algorithm has better performance in noise suppression and good reconstruction effect under limited angle situations.

Key words: positron emission tomography; image reconstruction; weighted least squares; total variation

1 引言

正电子发射型计算机断层显像 (Positron Emission Tomography, PET) 是核医学领域比较先进的临床检查影像技术,是目前惟一可在活体上显示生物分子代谢、受体及神经介质活动的新型影像技术,现已广泛用于多种疾病的诊断与鉴别诊断等方面. PET 成像的过程是通过注射或服用放射性药物,采集正电子湮灭产生的光子数目得到投影数据.但数据采集持续时间长,探测器死记

录的海量数据也为后续的数据存储和图像重建带来困难,且对人体有一定的伤害,因此在欠采样条件下进行图像重建是有必要的.但如果采样视角不够,重建的图像中就会出现伪影,受探测器效率影响,检测到的投影数据受噪声干扰大^[1,2].

在 PET 重建中的最小二乘法等价于 Gauss 统计模型的极大似然,在精度方面具有渐近最优性^[2]. Fessler^[3~5]提出的加权最小二乘法 (weighted least-squares, WLS) 考虑到在实际应用当中,对观测数据进行

预校正,这种方法已被广泛接受,在现代 PET 系统中已成为不可缺少的环节.但欠采样下的 PET 图像重建属于不完全数据重建范畴,由于数据的缺失,现有的重建方法显然不能得到满意的重建结果,在这种情况下,适当的约束条件、先验知识以及正则化因子对提高重建图像质量非常重要^[4,5].压缩感知是近几年由 Candes, Donoho 等人^[6,7]提出的一种与传统的香农信息理论不同的新型信息重构理论,其中稀疏正则化为图像重建提供了新的思想.为有效的抑制噪声和保持边缘尽可能不被破坏掉,本文在最小二乘法目标函数的基础上引入全变差正则惩罚项^[8~10],运用交替优化的思想^[11],对目标函数交替优化,初步优化选用超松弛迭代算法,再次使用全变差的梯度下降方法对图像进行调整,最终得到优化解.在仿真实验中将与加权最小二乘法^[3],二次惩罚项的加权最小二乘法^[4]重建结果进行比较,验证了本文模型与数值算法的有效性.

2 全变差正则项的加权最小二乘法

在 PET 图像重建理论中,常采用的离散模型为: $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{X}$,其中 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_M)^T$ 表示探测到的投影数据, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ 表示图像向量, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 $M \times N$ 投影矩阵, a_{ij} 表示从第 j 个像素放射出的光子被第 i 个探测器接收到的概率.基于加权最小二乘估计的目标函数为:

$$\min_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) \quad (1)$$

其中 \mathbf{W} 为对角权重矩阵^[4].为了提高图像质量,降低噪声并保持边缘,对目标函数加入全变差正则项^[8],全变差实际上就是梯度的 l_1 范数,但在实际的 TV 范数计算中使用起来不太方便,这里就用 l_2 范数近似 l_1 范数,并引进一个很小的参数 ϵ 以防求偏导后为无穷大:

$$\begin{aligned} TV(v) &= \iint \sqrt{\|\nabla v(x, y)\|_2^2 + \epsilon^2} dx dy \\ &= \iint \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| dx dy \\ &= \iint \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \epsilon^2} dx dy \end{aligned} \quad (2)$$

对上式写成关于矩阵差分形式,对于二维图像 \mathbf{X} 这里暂时把每一个像元用双下标表示 $x_{i,j}$:

$$U_{TV}(\mathbf{X}) = \sum_{i,j} \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + \epsilon^2} \quad (3)$$

引进的参数 ϵ 应小于等于 1% 的 \mathbf{X} 最大值,这时目标函数就可写成:

$$\arg \min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) + \beta U_{TV}(\mathbf{X}) \quad (4)$$

$\beta > 0$ 为权重系数.引入参数 \mathbf{Z} 将式(4)可以转化为下

面的约束优化问题:

$$\begin{cases} \arg \min_{\mathbf{X}, \mathbf{Z}} \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) + \beta U_{TV}(\mathbf{Z}) \\ \text{s.t. } \|\mathbf{X} - \mathbf{Z}\|_2^2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

再次利用 Lagrange 定理将式(5)转化为无约束优化问题^[11]:

$$\arg \min_{\mathbf{X}, \mathbf{Z}} \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{P}) + \beta U_{TV}(\mathbf{Z}) + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{X} - \mathbf{Z}\|_2^2 \quad (6)$$

由最优化理论的惩罚函数思想可知,优化问题式(6)的最优解的必要条件为 $\|\mathbf{X} - \mathbf{Z}\|_2^2 = 0$ 因此,优化问题式(6)的最优解即为所求目标函数式(4)的最优解,对于目标函数题式(6)的求解,采用交替进行优化:

$$\begin{cases} \mathbf{X}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{X}^t - \mathbf{P}\|_{\mathbf{W}^{-1}}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{X}^t - \mathbf{Z}^t\|_2^2 \\ \mathbf{Z}^{t+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \beta U_{TV}(\mathbf{Z}^t) + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{X}^{t+1} - \mathbf{Z}^t\|_2^2 \end{cases} \quad (7)$$

式中 $\mathbf{X}^t, \mathbf{Z}^t$ 表示第 t 次优化的结果; $\mathbf{X}^{t+1}, \mathbf{Z}^{t+1}$ 表示第 $t+1$ 次的优化结果.求出两个子问题的最优解,并将它们作为下一次迭代优化的初始值,然后进入下次迭代,如此交替进行,实现对目标函数的优化.根据图像重构精度的要求,选取适当大小的 β 值及 Lagrange 罚因子 α .第一个子问题是一个二次凸优化问题,存在最优解,这里我们使用超松弛 SOR 迭代的方法进行求解.对目标函数进行求导并令其为零,构造线性方程,利用超松弛迭代公式可得到 \mathbf{X} 的迭代解:

$$\mathbf{X}^{t+1} = \mathbf{X}^t + \omega \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{P} + \alpha \mathbf{Z} - (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) \mathbf{X}^t] \quad (8)$$

其中 \mathbf{D} 为 $\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}$ 的主对角元素组成的对角矩阵, ω 为松弛因子,取值范围为 $0 < \omega < 2$.第二个子问题是全变差最小化问题,这里采用梯度下降法对其进行优化.利用第一个子问题的最优解 \mathbf{X}^{t+1} ,直接对目标函数进行求导,得到优化迭代公式:

$$\mathbf{Z}^{t+1} = \mathbf{X}^{t+1} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial U_{TV}(\mathbf{Z}^t)}{\partial \mathbf{Z}^t} \quad (9)$$

3 数值仿真实验

PET 仿真实验采用大小为 128×128 像素的 Zubal 模型,如图 1 所示,图像的像素点取值范围在 0 到 5 之间. PET 探测数据模拟中,检测的光子总数为 3×10^5 ,为 30 个角度采样,对照组为检测光子数为 9×10^5 ,90 个采样角度.探测数据服从泊松分布,其中模拟延迟随机计数 r_i 占总光

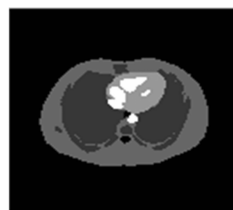


图1 Zubal模型

子数的 10%,同时设定校正系数 c_i 为服从标准差等于 0.3 的 log-normal 随机变量.为评价图像的质量,采用相关系数(Correlation Coefficient, CORR)作为重建图像与原始图像之间的空间相似性测度,方差(Variance, VAR)作为偏差的量度,表征重建图像于真实图像直接的近似程度,信噪比(signal to noise ratio, SNR)作为噪声的量度.

完整的实验步骤描述如下:

得到投影数据 P ,系统投影矩阵 A ,使用滤波反投影

初始化: 算法得到的图像作为初始图像 X^0 ,权重系数 β ,松弛因子 ω ,及 Lagrange 罚因子 α .

迭代算法: For $t = 1$ to $t = n$

 执行(8)式的迭代公式,得到最优解 X^{t+1} ;

 执行(9)式的迭代公式,得到最优解 Z^{t+1} ;

 判断迭代停止条件:若 $t > n$ 或者达到误差

$\frac{\|Z^{t+1} - Z^t\|_2}{\|Z^t\|_2} < \epsilon$ 范围,执行输出.否则,令 $t = t + 1, \alpha =$

$\alpha \times \gamma$,返回继续迭代;

End

输出: 优化后重建图像 Z^{t+1}

4 实验结果与分析

本次实验仿真研究了全变差正则项加权最小二乘法(TV-WLS)与二次惩罚项的加权最小二乘法(PWLS),加权最小二乘法(WLS)这三种算法,并对这三种重建算法进行比较.图 2 为对 Zubal 模型的重建效果图,其中采样角度为 30 个, $\beta = 1, \omega = 1.5, \alpha = 100, c = 1.1$,初始迭代图像都为 FBP 重建图像,从图中可以看出,TV-WLS 算法重建后的图像伪影少,在局部区域内平滑,重建效果要在很大程度上优于前两种算法重建的图像.

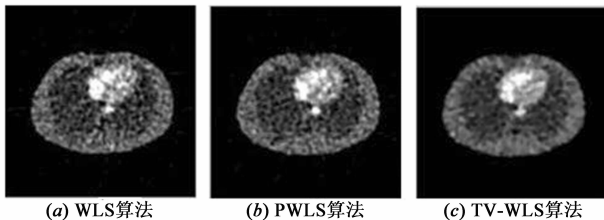


图2 30个投影角度的重建图

图 3 为采样角度为 90 个的情况下重建的效果图,同样可以看到本文中的方法重建效果要好于传统的重建方法.与图 2 相比可以看出在采样角度增加时三种算

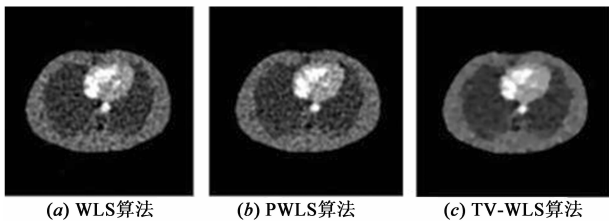


图3 90个投影角度的重建图

法重建效果都有明显增加.图 4 为在 30 个采样角度下本文中的算法与 PWLS, WLS 这三种算法之间的 CORR, VAR, SNR 的曲线图,以及模型原图与三种算法重建后图像的第 64 行像素值的轮廓图.图 5 为 90 个采样角度下的重建质量评价.从图中可以看出随着迭代的次数的增加图像重建效果逐渐改善,但最后趋于收敛,在三个质量评价参数上本文中所提出的算法均高于传统算法,从图像轮廓图可以看到,本文所提算法能够更好的接近原图,在局部区域能够起到平滑的作用.

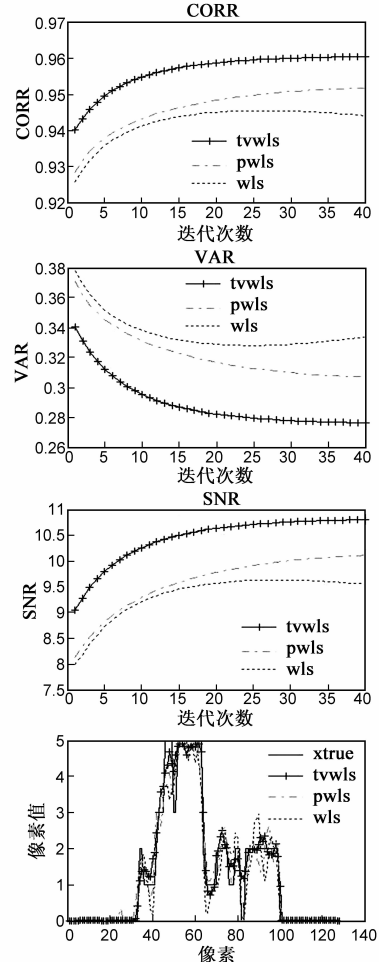


图4 WLS、PWLS、TV-WLS算法的评价参数和重建轮廓图(30个投影角度)

5 讨论与结论

从上面实验可以看出基于全变差正则项的加权最小二乘法具有更好的图像重建效果,能够在欠采样的条件下有效的抑制噪声,与传统的二次惩罚加权最小二乘法有明显的优势.随着仿真过程中采样角度的增加,检测光子的增加,图像重建效果有很好的改善.从质量评价参数图可以看到,在收敛速度方面,本方法与传统的算法相当,能很好的抑制噪声,提高成像的质

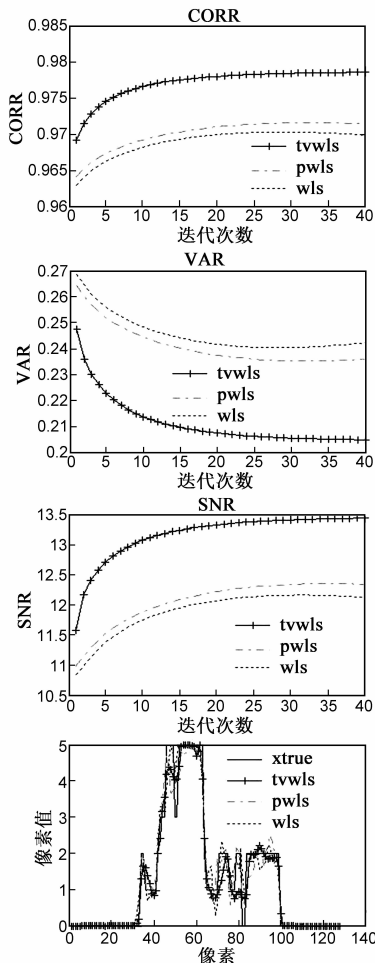


图5 WLS、PWLS、TV-WLS算法的评价参数和重建轮廓图(90个投影角度)

量,有利于实际的使用.算法中对目标函数的求解在理论上易于分析,正则项的权重选取直接影响对图像的平滑程度.权重的有效选择也是下一步研究的内容,另外如何更好的稀疏化,更好的恢复图像的结构特点,更好地求解目标函数^[12,13],这些都是下一步需要研究的内容.

参考文献

- [1] 高上凯. 医学成像系统[M]. 北京:清华大学出版社, 2010. 182-195.
- [2] 曾更生. 医学图像重建入门[M]. 北京:高等教育出版社, 2009. 125-171.
- [3] J Anderson, BA Mair, Murali Rao, et al. Weighted least-squares reconstruction methods for positron emission tomography[J]. IEEE Trans on Med Image, 1997, 16(2): 159-165.
- [4] J A Fessler. Penalized weighted least-squares image reconstruction for positron emission tomography[J]. IEEE Trans on Med Image. 1994, 13(2): 290-300.
- [5] J A Fessler, E P Ficaro, et al. Grouped-coordinate ascent algo-

ritms for penalized-likelihood transmission image reconstruction[J]. IEEE Trans on Med Image, 1997, 16(2): 166-175.

- [6] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [7] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [8] 田玲玲, 黄静, 等. 基于全变分 α 散度最小化的 PET 优质重建[J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1263-1268.
Tian lingling, Huang jing, et al. Total variation based α -divergence minimization reconstruction for positron emission tomography[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(6): 1263-1268. (in Chinese)
- [9] 李志林, 陈后金, 等. 一种有效的压缩感知图像重建算法[J]. 电子学报, 2011, 39(12): 2796-2800.
Li zhilin, Chen houjin, et al. An efficient algorithm for compressed sensing image reconstruction[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2796-2800. (in Chinese)
- [10] 朱宏擎, 舒华忠, 等. 正电子发射计算机断层显像的全变分加权成像方法[P]. 中国专利: 200510037621. 8, 2005-01-06.
- [11] xiaoqiang Lu, Yi sun, et al. Image reconstruction by an alternating minimization[J]. Neuro Computing, 2011, 74(5): 661-670.
- [12] S J Wright, R D Nowak, et al. Sparse reconstruction by separable approximation[J]. IEEE Trans on Signal Process, 2009, 57(7): 2479-2492.
- [13] Yu H, Wang G. Compressed sensing based interior tomography[J]. PhysMed Biol, 2009, 54(9): 2791-2805.

作者简介



董基均 男, 1977年9月生于浙江兰溪, 博士, 副教授. 主要研究方向为生物医学信号处理, 生物传感器技术.

E-mail: jijuntong@zstu.edu.cn



刘进 男, 1989年8月生于安徽安庆. 浙江理工大学信息学院硕士研究生. 主要研究方向为 PET 医学图像重建.